1. a) La matrice A est idempotente (Cochran).

   b)

$$\frac{Y_1Y_2 - Y_3Y_4}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}Y'\begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} Y = \frac{1}{\sigma^2}Y'AY$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \neq A$$

   Donc, une condition requise pour avoir une khi-deux n'est pas recontrée.

2. $10(X_1 - \overline{X})^2 + 5(X_2 - \overline{X})^2 + 2(X_3 - \overline{X})^2 =$
   $10(X_1^2 - 2X_1\overline{X} + \overline{X}^2) + 5(X_2^2 - 2X_2\overline{X} + \overline{X}^2) + 2(X_3^2 - 2X_3\overline{X} + \overline{X}^2) =$
   $10X_1^2 - 20X_1\overline{X} + 10\overline{X}^2 + 5X_2^2 - 10X_2\overline{X} + 5\overline{X}^2 + 2X_3^2 - 4X_3\overline{X} + 2\overline{X}^2 =$
   $10X_1^2 + 5X_2^2 + 2X_3^2 + 17\overline{X}^2 + \overline{X}(-20X_1 - 10X_2 - 4X_3) =$
   $10X_1^2 + 5X_2^2 + 2X_3^2 + 17\overline{X}^2 + \overline{X}(-2 \cdot 17\overline{X}) =$
   $10X_1^2 + 5X_2^2 + 2X_3^2 - 17\overline{X}^2 =$
   $10X_1^2 + 5X_2^2 + 2X_3^2 - \frac{1}{17}(100X_1^2 + 25X_2^2 + 4X_3^2 + 100X_1X_2 + 40X_1X_3 + 20X_2X_3) =$
   $\frac{1}{17}(70X_1^2 + 60X_2^2 + 30X_3^2 - 100X_1X_2 - 40X_1X_3 - 20X_2X_3)$

   $Y_1 = \sqrt{10}X_1 \sim N(0,1)$
   $Y_2 = \sqrt{5}X_2 \sim N(0,1)$
   $Y_3 = \sqrt{2}X_3 \sim N(0,1)$

   $10(X_1 - \overline{X})^2 + 5(X_2 - \overline{X})^2 + 2(X_3 - \overline{X})^2 =$
   $\frac{1}{17}(7Y_1^2 + 12Y_2^2 + 15Y_3^2 - \frac{100}{\sqrt{50}}Y_1Y_2 - \frac{40}{\sqrt{20}}Y_1Y_3 - \frac{20}{\sqrt{10}}Y_2Y_3) =$
   $\frac{1}{17}(7Y_1^2 + 12Y_2^2 + 15Y_3^2 - 10\sqrt{2}Y_1Y_2 - 4\sqrt{5}Y_1Y_3 - 2\sqrt{10}Y_2Y_3)$

   La matrice associée à cette forme quadratique est :

$$A = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 7 & -5\sqrt{2} & -2\sqrt{5} \\ -5\sqrt{2} & 12 & -\sqrt{10} \\ -2\sqrt{5} & -\sqrt{10} & 15 \end{bmatrix}$$

   Et nous pouvons vérifier que $A^2 = A$
   Ce qui signifie que nous avons une χ^2 de $rang(A) = 3$ degrés de liberté.

3. 2-16 a) Nous avons pris pour acquis que les variances sont différentes : les diagrammes en boîte de la figure 3 illustrent bien cette différence.
   En utilisant un test de Student, au seuil de 5%, on peut dire qu'il y a une différence entre les deux méthodes. Nous obtenons une valeur critique de 5.3302 pour un $t_{0.025,10}$ de 2.2281.

   b) Le seuil observé est de 0.00033289

   c) $1 - \alpha = P\left(|\mu_1 - \mu_2| \in \left[|\overline{X}_1 - \overline{X}_2| - t_{\frac{\alpha}{2},10}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}, |\overline{X}_1 - \overline{X}_2| + t_{\frac{\alpha}{2},10}\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}\right]\right)$
   Intervalle à 95 % : [0.1654 , 0.3823]
   Noter qu'il ne contient pas zéro, ce qui confirme la décision de rejeter H_0 .

   d)

coefficients	d'asymétrie	d'applatissment
Karlsruhe	0.26797753	-1.0126787
Lehigh	1.29112506	3.86968295
loi normale	0	3

Pour la méthode de Karlsruhe, en regardant la droite de Henri (figure 1), les données observées semblent suivre une normale, en effet, le boxplot suggère une quasi-symétrie, et le coefficient de symétrie est proche de zéro. Par contre, le coefficient d'applatissement est loin de 3.

Pour la méthode de Lehigh, là encore la droite de Henri (figure 2) suggère la normalité. En effet, le coefficient d'applatissement est proche de 3. Par contre, la normalité est sérieusement mise en doute par notre boxplot, car il y a beaucoup de valeurs extrêmes.

Dans le cas des deux méthodes, le petit nombre d'observations défavorise une conclusion sûre de normalité. Si nous avions à nous prononcer, nous dirions que la normalité ne serait pas invraissemblable pour les données de la première méthode, et discutable pour la deuxième.

2-21 $Z_0 = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \qquad N = n_1 + n_2$

$1 - \beta = P\left(|Z_0| > z_{\frac{\alpha}{2}} \quad | \quad |\mu_1 - \mu_2| = \Delta\right) \qquad \Delta \neq 0$

Pour maximiser $1-\beta$, il faut maximiser $|Z_0|$, donc minimiser $\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}$

$\frac{d}{dn_1}\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{N-n_1}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\sigma_1^2}{n_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{(N-n_1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_1^2}{n_1^2} = \frac{\sigma_2^2}{n_2^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{n_1}{n_2}$

Le rapport des échantillons doit être égal au rapport des écart-types.

Et nous sommes certains que nous avons un minimum car $\frac{d^2}{dn_1^2}\left(\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{N-n_1}\right) = 2\frac{\sigma_1^2}{n_1^3} + 2\frac{\sigma_2^2}{n_2^3} > 0$

```
Figure 1                Variable:  karls

                         Normal Probability Plot
     1.575+                                        *++
          |                                  * ++++
          |                                 +++
          |                              +*+
     1.375+                          ++*+
          |                      *++*
          |                   ++++
          |               +++*
     1.175+          * ++++*
           +----+----+----+----+----+----+----+----+----+----+
               -2        -1         0        +1        +2
```

```
Figure 2               Variable:  lehigh

                         Normal Probability Plot
     1.175+                                        * +++++++++
          |                                ++++++++++
     1.075+                   *  *++*++*++*  *
          |            ++++*+++++
     0.975+  ++++++++*+
           +----+----+----+----+----+----+----+----+----+----+
               -2        -1         0        +1        +2
```