Chapitre 5

5 i) $P_{H_0}(R_{11}=1, R_{12}=2; R_{21}=3, R_{22}=4, R_{23}=5) = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{2,3,3}} = \dfrac{1}{560}$

ii) $P_{H_0}(R_{11}=1, R_{12}=3; R_{21}=5, R_{22}=6, R_{23}=7) = \dfrac{\binom{3}{3}}{\binom{8}{2,3,3}} = \dfrac{1}{560}$

iii) $P_{H_0}(R_{11}=1, R_{21}=2) = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3}}{\binom{8}{2,3,3}} = \dfrac{3}{28}$

iv) $P_{H_0}(R_{11}=1, R_{12}=2) = \dfrac{\binom{6}{3}\binom{3}{3}}{\binom{8}{2,3,3}} = \dfrac{1}{28}$

v) $P_{H_0}(R_{11}=1, R_{21}=4) = \dfrac{\binom{6}{1}\binom{5}{2}\binom{3}{3}}{\binom{8}{2,3,3}} = \dfrac{3}{28}$

vi) $P_{H_0}(R_{11}=1, R_{21}=2, R_{31}=3) = \dfrac{\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{2}}{\binom{8}{2,3,3}} = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{2}}{\binom{8}{3,2,3}} = \dfrac{\binom{5}{2}\binom{3}{2}\binom{1}{1}}{\binom{8}{3,3,2}} = \dfrac{3}{56}$

8 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
H_1 : il existe au moins un couple (k,l) avec $\mu_k < \mu_l$
Programme S-Plus utilisé :

```
x1<-c(123,121,159,138,178,144,172,165,143,179,139,146,161,149)
pos<-order(x1)
# x2 = vecteur des rangs
x2<-rep(0,length(x1))
x2[pos]<-1:length(x1)
sum(x2[1:5])
sum(x2[6:10])
sum(x2[11:14])
```

$R_{1.} = 28$ $R_{1.} = 48$ $R_{1.} = 29$ $N = 14$

$$K = \frac{12}{14\times 15}\left(5\left(\frac{28}{5}-\frac{15}{2}\right)^2 + 5\left(\frac{48}{5}-\frac{15}{2}\right)^2 4\left(\frac{29}{4}-\frac{15}{2}\right)^2\right) = 2.3057$$

$P(K \geq 11) > 0.148 \ \Rightarrow$ On ne rejette pas H_0 au seuil de 5%.

11 $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_{15}$
H_1 : il existe au moins un couple (k,l) avec $\mu_k < \mu_l$
Programme S-Plus utilisé :

```
x1<-scan('11.dat')
x2<-matrix(x1,nrow=15)
# x3 = vecteur des colonnes
# de l'enonce a la queue leu leu
x3<-c(t(x2))
pos<-order(x3)
# vrnm = vecteur des rangs non moyens
vrnm<-rep(0,75)
vrnm[pos]<-1:75
```

```
# x5 = donnees ordonnees
x5<-sort(x3)
# vrmoy = vecteur des rangs moyens
vrmoy<-rep(0,75)
val<-x5[1]
i<-2
count<-1
while(i<=75){
    if(x5[i]==val){
        count<-count+1
    else{
        vrmoy[pos[(i-count):(i-1)]]<-mean(
            vrnm[pos[(i-count):(i-1)]])
        count<-1
        val<-x5[i]
        }
    i<-i+1
    }
vrmoy[pos[(76-count):75]]<-mean(vrnm[pos[(76-count):75]])

mtrmoy<-matrix(vrmoy,ncol=15)
R<-rep(0,15)
for(i in 1:15){R[i]<-sum(mtrmoy[,i])}

# K etoile
d<-c(1,1,1,1,1,1,1,2,1,1,4,5,1,3,2,1,1,5,1,2,
    1,4,1,2,1,3,2,2,2,5,1,3,1,3,1,2,1,1,3)
(12/75/76/5*sum(R^2)-3*76)/(1-sum(d*(d^2-1))/75/(75^2-1))
```

$K^* = 29.58524$
$\mathrm{P}(\chi^2_{14} \geq K^*) = 0.0087$
Au seuil de 5%, on rejette H_0

13 H_0 : le traitement n'a pas d'effet
H_1 : le traitement a un effet indéfini
$d_1 = 2 \qquad d_2 = 4 \qquad d_3 = 9 \qquad d_4 = 4 \qquad d_5 = 1$

$$\bar{K}^* = \frac{20 \times 19}{10^2}\left(\frac{2^2}{2} + \frac{2^2}{4} + \frac{5^2}{9} + \frac{1^2}{4} - \frac{10^2}{20}\right) = 3.9056$$

$\boxed{\mathrm{P}(\chi^2_4 \geq \bar{K}^*) = 0.4189}$
Au seuil de 5%, ne pas rejetter H_0
Avec W_s^* :
$W_s^* = 125.5 \qquad \mathrm{E}_{H_0}(W_s^*) = 105 \qquad \mathrm{Var}_{H_0}(W_s^*) = 156.4$

$$\boxed{\alpha_0 = 2 \times \mathrm{P}\left(Z > \left|\frac{125.5 - 105}{\sqrt{156.4}}\right|\right) = 0.1012}$$

Les deux tests mènent à la même conclusion.

19 $H_0 : \pi_1 = \pi_2$
$H_1 : \pi_1 \neq \pi_2$
$\hat{\pi}_1 = 0.0784 \qquad \hat{\pi}_2 = 0.0589$

$$\hat{\pi} = \frac{12629 \times -.0784 + 25045 \times 0.0589}{12629 + 25045} = 0.06544$$

$$\alpha_0 = 2\times \mathrm{P}\left(Z > \left|\frac{\hat{\pi}_1-\hat{\pi}_2}{\sqrt{\hat{\pi}(1-\hat{\pi})\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}\right)}}\right|\right) = 2\times\Phi\left(\frac{0.0589-0.0784}{\sqrt{0.06544(1-0.06544)\left(\frac{1}{12629}+\frac{1}{25045}\right)}}\right)$$

$\alpha_0 = 5\times 10^{-13}$

Au seuil de 5%, on rejette H_0, il y a donc une différence significative entre les filles et les garçons écossais sur les proportions de gauchers.

48(i) Pour avoir tous les rangs possibles (par Maple) :

```
with(combinat, permute);
permute(6);
```

Et toutes les valeurs possibles de $\max(R_1, R_2)$: (S-Plus)

```
permv<-scan('48(i).dat')
permtr<-matrix(permv,byrow=T,ncol=6)
maxR<-rep(0,720)
for(i in 1:720){maxR[i]<-max(sum(permtr[i,3:4]),sum(permtr[i,5:6]))}
sum(maxR==5)
sum(maxR==6)
sum(maxR==7)
sum(maxR==8)
sum(maxR==9)
sum(maxR==10)
sum(maxR==11)
```

La distribution exacte de $\max(R_1, R_2)$ sous H_0 est :

$\mathrm{P}(\max(R_1,R_2)=5)=\frac{16}{720}=\frac{1}{45}$

$\mathrm{P}(\max(R_1,R_2)=6)=\frac{48}{720}=\frac{1}{15}$

$\mathrm{P}(\max(R_1,R_2)=7)=\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(\max(R_1,R_2)=8)=\frac{144}{720}=\frac{1}{5}$

$\mathrm{P}(\max(R_1,R_2)=9)=\frac{176}{720}=\frac{11}{45}$

$\mathrm{P}(\max(R_1,R_2)=10)=\frac{96}{720}=\frac{2}{15}$

$\mathrm{P}(\max(R_1,R_2)=11)=\frac{96}{720}=\frac{2}{15}$

49

$$\begin{aligned}
J &= 2\sum_{1\le i<j\le s} W_{ij} - \sum_{1\le i<j\le s} n_i n_j \\
&= \sum_{1\le i<j\le s}(2W_{ij} - n_i n_j) \\
&= 2\sum_{1\le i<j\le s}\left(W_{ij} - \frac{n_i n_j}{2}\right) \\
&= 2\sum_{1\le i<j\le s}\left(W_s^{(i,j)} - \frac{n_j(n_j+1)}{2} - \frac{n_i n_j}{2}\right)
\end{aligned}$$

Car W_{ij} est le nombre de couples (k,l) avec $Y_{ik} < Y_{jl}$

Il a déjà été prouvé que $W_s^{(i,j)}$ es symétrique autour de $\frac{n_j(n_i+n_j+1)}{2}$

Donc, $W_s^{(i,j)} - \frac{n_j(n_j+1)}{2}$ est symétrique autour de :

$$\frac{n_j(n_i+n_j+1) - n_j(n_j+1)}{2} = \frac{n_j^2 + n_i n_j + n_j - n_j^2 - n_j}{2} = \frac{n_i n_j}{2}$$

$$\Rightarrow \quad W_s^{(i,j)} - \frac{n_j(n_j+1)}{2} - \frac{n_i n_j}{2} \text{ est symétrique autour de zéro.}$$

$$\Rightarrow \sum_{1\le i<j\le s}\left(W_s^{(i,j)} - \frac{n_j(n_j+1)}{2} - \frac{n_i n_j}{2}\right) \text{ est symétrique autour de zéro.}$$

Et si $\frac{J}{2}$ est symétrique autour de zéro, J aussi.

Chapitre 6

1 i) $\mathrm{P}(R_{11}=3; R_{21}=3; R_{31}=3; R_{41}=3) = \left(\frac{2!}{3!}\right)^4 = \frac{1}{81}$

ii) $\mathrm{P}(R_{11}=3; R_{21}=3; R_{31}=3; R_{41}=2) = \left(\frac{2!}{3!}\right)^4 = \frac{1}{81}$

iii) $4 \times \mathrm{P}(R_{11}=3; R_{21}=3; R_{31}=3; R_{41}=2) = \frac{4}{81}$

2 i) 3+3+3+1=10
$\hookrightarrow$ 4 possibilités $\times 2!^4$(pour les arrangements des rangs restants dans chaque bloc)=64
3+3+2+2=10 $\rightarrow$ 6 possibilités $\times 2!^4 = 96$
Nombre total de possibilités : $3!^4 = 1296$
$\mathrm{Pr}(R_{1\cdot} = 10) = \frac{64+96}{1296} = \frac{10}{81}$

ii) $\left.\begin{array}{c} 3+3+2+2=10 \\ 1+1+1+1=4 \end{array}\right\}$ 6 possibilités
Nombre total de possibilités : $3!^4 = 1296$
$\mathrm{Pr}(R_{1\cdot} = 10, R_{2\cdot} = 4) = \frac{6}{1296} = \frac{1}{216}$

5(i) Programme S-Plus utilisé :

```
x1<-scan('5(i).dat')
x2<-matrix(x1,byrow=T,ncol=6)
Q<-rep(0,36)
N<-2
s<-3
for(i in 1:36){Q[i]<-12/N/s/(s+1)*(
    (x2[i,1]+x2[i,4])^2+(x2[i,2]+x2[i,5])^2+(
    x2[i,3]+x2[i,6])^2)-3*N*(s+1)}
sum(Q==0)
sum(Q==1)
sum(Q==2)
sum(Q==3)
sum(Q==4)
```

5(i).dat contient 36 lignes dans le genre “1 2 3 1 2 3”...
Il y a toutes les permutations possibles des trois premiers chiffres et celles des trois derniers.
La distribution de Q :
$\mathrm{P}(Q=0) = \frac{6}{36}$
$\mathrm{P}(Q=1) = \frac{12}{36}$
$\mathrm{P}(Q=3) = \frac{12}{36}$
$\mathrm{P}(Q=4) = \frac{6}{36}$

9 H_0 : il n'y a pas de différence entre les lignes
Programme S-Plus utilisé : (page suivante)

```
x1<-scan('9.dat')
x2<-matrix(x1,byrow=T,nrow=4)
for(i in 1:10){print(sum(x2[,i]))}
sum(x2[1,])
sum(x2[2,])
sum(x2[3,])
sum(x2[4,])
N<-10
s<-4
R<-c(20,28,29.5,22.5)
d<-c(2,2,2,2,2,3,2)

# Q etoile

12*N/s/(s+1)*sum((R/N-(s+1)/2)^2)/(1-sum(d^3-d)/N/s/(s^2-1))
```

$R_{1.} = 20 \qquad R_{2.} = 28 \qquad R_{3.} = 29.5 \qquad R_{4.} = 22.5$

$Q^* = 4.0333$

$\mathrm{P}(\chi^2_3 \geq Q^*) = 0.2579$

$\Rightarrow$ Au seuil de 5%, on ne rejette pas H_0