**Numéro 1**

a) Minimiser $f$ est comparable à minimiser une fonction $g$ définie par

$$g(x,y,\alpha) = \begin{cases} 1+\alpha(1-2x)(1-2y) & \text{pour } 0 \le x,y \le 1 \text{ et } -1 \le \alpha \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{\partial g(x,y,\alpha)}{\partial x} = -2\alpha(1-2y)$$

$$\frac{\partial g(x,y,\alpha)}{\partial y} = -2\alpha(1-2x)$$

$$\frac{\partial g(x,y,\alpha)}{\partial \alpha} = (1-2x)(1-2y)$$

On remarque que $\nabla g(x,\frac{1}{2},0) = \nabla g(\frac{1}{2},y,0) = \nabla g(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\alpha) = (0,0,0)$.
Les ensembles de points critiques $(x,\frac{1}{2},0)$ et $(\frac{1}{2},y,0)$ en sont où $f$ est toujours 1.
Et dans l'ensemble $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\alpha)$ le signe de la pente à proximité de ces points peut être négatif :

$$g(\tfrac{1}{2}+h,\tfrac{1}{2}+k,\alpha) - g(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\alpha) = 1+\alpha(1-1-2h)(1-1-2k)-1 = 4\alpha hk$$

Il est facile de trouver des valeurs de $h$ et $k$ telles que $4\alpha hk < 0$ avec $\alpha \neq 0$ , donc $g(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\alpha)$ n'est pas un minimum.

En faisant un raisonnement semblable avec les deux premiers ensembles de points (ou intervalles), donc en faisant varier $\alpha$, on en arrive à la conclusion que le ou les minimums ne peuvent que se trouver aux limites du support de $g$. C'est-à-dire aux points où :
$\alpha \in \{-1,1\}$ $\quad x,y \in \{0,1\}$
Dans ce choix réduit, on voit que $g$ est minimisé à zéro aux points
(0, 0, -1), (1, 1, -1 ), (1, 0, 1) et (0, 1, 1).
Ainsi $f(x,y) \ge 0$ sauf que 0 n'est pas atteint si $0 < x,y < 1$ .

$$\int_0^1 \int_0^1 (1+\alpha(1-2x)(1-2y)dx)dy = \int_0^1 \left( \int_0^1 1dx + \alpha(1-2y)\int_0^1 (1-2x)dx \right) dy = \int_0^1 \left( [x]_0^1 + \alpha(1-2y)[x-x^2]_0^1 \right) dy = \int_0^1 1dy = 1$$

b) $$f_X(x,y) = \begin{cases} \int_0^1 (1+\alpha(1-2x)(1-2y))dy = I & \text{pour } 0 \le x,y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 1dy + \alpha \int_0^1 (1-2x-2y+4xy)dy \\ &= [y]_0^1 + \alpha[y]_0^1 - 2\alpha x[y]_0^1 - \alpha[y^2]_0^1 + 2\alpha x[y^2]_0^1 \\ &= 1+\alpha-2\alpha x-\alpha+2\alpha x \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$f_X(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \le x,y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de la même manière :

$$f_Y(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \le x,y \le 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

c) $\mathrm{E}(X) = \mathrm{E}(Y) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}[x^2]_0^1 = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 (xy + xy\alpha(1-2x)(1-2y))dxdy \\
&= \int_0^1 \left( x \int_0^1 ydy + \alpha x(1-2x) \int_0^1 (y - 2y^2)dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left( x \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 + \alpha x(1-2x) \left( \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^1 - 2\left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^1 \right) \right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2} + \alpha x(1-2x)\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right) dx \\
&= \int_0^1 \frac{x}{2} - \frac{1}{6}\alpha x + \frac{1}{3}\alpha x^2 dx \\
&= \frac{1}{4} - \frac{\alpha}{12} + \frac{\alpha}{9} = \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{36}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y) = \dfrac{\alpha}{36}$

$\mathrm{E}(X^2) = \mathrm{E}(Y^2) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}[x^3]_0^1 = \dfrac{1}{3}$

$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) = \mathrm{E}(X^2) - (\mathrm{E}(X))^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

$$\rho = \frac{\alpha/36}{\sqrt{\frac{1}{12} \times \frac{1}{12}}} = \frac{\alpha/36}{1/12} = \frac{\alpha}{3}$$

d) $f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)} = \dfrac{f(x,y)}{1} = f(x,y)$

$$\mathrm{E}(X|Y) = \int_0^1 x f_{X|Y}(x|y)dx = \int_0^1 x(1 + \alpha(1-2x)(1-2y))dx = \frac{\alpha(2y-1)}{6} + \frac{1}{2}$$

e) Il a été trouvé que $\mathrm{Var}(Y) = 1/12$
Et par symétrie, $\mathrm{E}(Y|X) = \frac{\alpha(2x-1)}{6} + \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y|X)) &= \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X)^2) - \mathrm{E}(\mathrm{E}(Y|X))^2 \\
&= \mathrm{E}(\tfrac{1}{36}\alpha^2 - \tfrac{1}{9}\alpha^2 X - \tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{9}\alpha^2 X^2 + \tfrac{1}{3}\alpha X + \tfrac{1}{4}) - \mathrm{E}(Y)^2 \\
&= \tfrac{1}{36}\alpha^2 - \tfrac{1}{9}\alpha^2 \mathrm{E}(X) - \tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{9}\alpha^2 \mathrm{E}(X^2) + \tfrac{1}{3}\alpha \mathrm{E}(X)
\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}(Y|X) = \mathrm{E}(Y^2|X) - \mathrm{E}(Y|X)^2$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(Y^2|X) &= \textstyle\int_0^1 y^2 f_{Y|X}(y|x)dy = \int_0^1 y^2 \frac{f(x,y)}{f_X(x)} dy = \int_0^1 y^2 dy + \alpha(1-2x) \int_0^1 (y^2 - 2y^3)dy \\
&= \frac{1}{3} + \frac{(2x-1)\alpha}{6}
\end{aligned}$$

$\mathrm{Var}(Y|X) = \frac{1}{12} - \frac{1}{36}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^2 x - \frac{1}{9}\alpha^2 x^2$

$\mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) = \frac{1}{12} - \frac{1}{36}\alpha^2 + \frac{1}{9}\alpha^2 \mathrm{E}(X) - \frac{1}{9}\alpha^2 \mathrm{E}(X^2)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\mathrm{E}(Y|X)) - \mathrm{E}(\mathrm{Var}(Y|X)) &= \tfrac{1}{36}\alpha^2 - \tfrac{1}{9}\alpha^2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{6}\alpha + \tfrac{1}{9}\alpha^2\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}\alpha\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{12} - \tfrac{1}{36}\alpha^2 + \tfrac{1}{9}\alpha^2\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{9}\alpha^2\tfrac{1}{3} \\
&= 1/12 = \mathrm{Var}(Y)
\end{aligned}$$

**Numéro 2**

a) Il y a un théorème qui dit que si on a $U = a + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i$ et $V = c + \sum_{j=1}^{m} d_j Y_j$, alors

$$\mathrm{Cov}(U,V) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} b_i d_j \mathrm{Cov}(X_i, Y_j)$$

Ainsi on obtient que :

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(a_1X + a_2Y) &= \mathrm{Cov}(a_1X + a_2Y, a_1X + a_2Y)\\ &= a_1^2\mathrm{Var}(X) + a_2^2\mathrm{Var}(Y) + 2a_1a_2\mathrm{Cov}(X,Y)\\ &= a_1^2\sigma_1^2 + a_2^2\sigma_2^2 + 2a_1a_2\sigma_{12}\end{aligned}$$

$$a'\Sigma a = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 a_1 + \sigma_{12}a_2 & \sigma_{12}a_1 + \sigma_2^2 a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \sigma_1^2 a_1^2 + \sigma_{12}a_2a_1 + \sigma_{12}a_1a_2 + \sigma_2^2 a_2^2$$

b) $\mathrm{Var}(a_1X + a_2Y) \geq 0$ (une variance n'est jamais négative)
Ainsi $a'\Sigma a \geq 0$, et même on peut dire $a'\Sigma a > 0$ car le seul cas òu la variance pourrait être nulle est celui òu $\mathrm{P}(a_1X + a_2Y = c) = 1$ car la variable aléatoire $(a_1X + a_2Y)$ n'aurait qu'une seule valeur possible.

c) $$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^2 & A_{11}A_{12} \\ A_{11}A_{12} & A_{12}^2 + A_{22}^2 \end{bmatrix}$$

$\sigma_1^2 = A_{11}^2$

$\sigma_{12} = A_{11}A_{12}$

$\sigma_2^2 = A_{12}^2 + A_{22}^2$

En substituant : $$A = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1} \\ 0 & \sqrt{\sigma_2^2 - \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}} \end{bmatrix}$$

Avec Maple : $$(A')^{-1} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sigma_1} & 0 \\ \dfrac{-\sigma_{12}}{\sigma_1^2\sqrt{\sigma_2^2 - \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}} & \dfrac{1}{\sqrt{\sigma_2^2 - \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}} \end{bmatrix}$$

d) $\mathrm{Var}(Z_1) = \mathrm{Var}(\frac{1}{\sigma_1}X) = \frac{1}{\sigma_1^2}\mathrm{Var}(X) = 1$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(Z_2) &= \mathrm{Var}\left(\frac{-\sigma_{12}X}{\sigma_1^2\sqrt{\sigma_2^2 - \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}} + \frac{Y}{\sqrt{\sigma_2^2 - \dfrac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}}\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_2^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}\mathrm{Var}\left(\frac{-\sigma_{12}X}{\sigma_1^2} + Y\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_2^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}\left(\mathrm{Var}\left(\frac{-\sigma_{12}X}{\sigma_1^2}\right) + \mathrm{Var}(Y) + 2\left(\frac{-\sigma_{12}}{\sigma_1^2}\right)\mathrm{Cov}(X,Y)\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_2^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}\left(\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^4}\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2\left(\frac{-\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{\sigma_2^2 - \frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}\left(\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2} + \sigma_2^2 - 2\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}\right) = 1\end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=\mathrm{Cov}\left(\tfrac{1}{\sigma_1}X,\tfrac{-\sigma_{12}X}{\sigma_1^2\sqrt{\sigma_2^2-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}}+\tfrac{Y}{\sqrt{\sigma_2^2-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}}\right)=\tfrac{1}{\sigma_1\sqrt{\sigma_2^2-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}}\mathrm{Cov}(X,\tfrac{-\sigma_{12}^2X}{\sigma_1^2}+Y)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X,\tfrac{-\sigma_{12}^2X}{\sigma_1^2}+Y)&=\mathrm{E}(\tfrac{-\sigma_{12}^2X^2}{\sigma_1^2}+XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}\left(\tfrac{-\sigma_{12}^2X}{\sigma_1^2}+Y\right)\\&=\frac{-\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}\mathrm{E}(X^2)+E(XY)+\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}\mathrm{E}(X)^2-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)\\&=\frac{-\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}\mathrm{Var}(X)+\mathrm{Cov}(X,Y)=-\sigma_{12}+\sigma_{12}=0\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)=0$

e) Si on pose :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix}=A'\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \dfrac{\sigma_{12}}{\sigma_1} & \sqrt{\sigma_2^2-\dfrac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}$$

Alors :

$\mathrm{E}(X)=\sigma_1\mathrm{E}(Z_1)+\mu_1=0+\mu_1$

$$\mathrm{E}(Y)=\frac{\sigma_{12}}{\sigma_1}\mathrm{E}(Z_1)+\mathrm{E}(Z_2)\sqrt{\sigma_2^2-\frac{\sigma_{12}^2}{\sigma_1^2}}+\mu_2=0+0+\mu_2$$

Le couple $(X,Y)$ est le même que depuis le début du numéro 2, avec la même matrice de variances-covariances $\Sigma$.